ＥＡ　解析学・位相序説　　講義報告[2]

２００８年2月１０日（日）　１４：３０－１７：３０

前回に引き続き始位相の例として、急減少関数全体の位相と局所コンパクト空間 Ω 上の $\mathbb{K}-$ 値連続関数全体のコンパクト一様位相を扱った。次に写像族を同時に連続にする最強の位相が存在することを示し、その位相を終位相と定義した。終位相の例として、局所コンパクト空間 Ω 上のサポート・コンパクトな連続関数全体の位相、$\mathbb{K}-$ 係数多項式全体 $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ 上の Inductive limit 位相と $\mathbb{K}-$ 上のベキ級数全体上の Projective limit 位相について扱った。ただし、$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を意味する。

例題 1.3 (急減少関数のクラス). $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{C}-$ 値無限回連続微分可能な関数 f が任意の $(m,n)\in\mathbb{N}_0^2$ に対して、

$$|x^m||D^n f(x)|\to 0 \quad (x\to\pm\infty)$$

を満たすとき、f を**急減少関数**と呼び、$\mathbb{R}$ 上の急減少関数全体を $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ と記す。
任意の $(m,n)\in\mathbb{N}_0^2$ に対して、

$$\eta_{mn}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}|D^n f(x)|\}$$

とおくと、η_{mn} は、$\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ 上のノルムになる。$\eta=\{\eta_{mn}\mid(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\}$ とおいたとき、急減少関数全体 $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ には、η に関する始位相 $\mathfrak{D}_\eta(\mathfrak{S}(\mathbb{R}))$ が入る。

定義 1.2 (局所コンパクト空間). 位相空間 $(\Omega,\{\mathfrak{V}(x)\}_{x\in X})$ が**局所コンパクト空間**であるとは、

$$\forall x_0\in\Omega,\forall V\in\mathfrak{V}(x_0),\exists K\in\mathfrak{K}(\Omega)\quad \textit{such that}\quad K\subset V$$

が成立することである。ただし、$\mathfrak{V}(x_0)$ は $x_0\in\Omega$ の近傍、$\mathfrak{K}(\Omega)$ は Ω 内のコンパクト集合全体とする。

例題 1.4 (コンパクト一様収束位相). $C(\Omega,\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}-$ 値連続関数全体のつくる代数とする。任意の $K\in\mathfrak{K}(\Omega)$ に対して

$$\eta_K(f)=\|f\|_K\quad \textit{for}\ \forall f\in C(\Omega,\mathbb{K})$$

とおくと、$\eta_K: C(\Omega,\mathbb{K})\to\mathbb{R}$ はセミ・ノルムになる。このとき、$\Phi=\{\eta_K\mid K\in\mathfrak{K}(\Omega)\}$ に関する始位相 $\mathfrak{D}_\Phi(C(\Omega,\mathbb{K}))$ を**コンパクト一様収束位相**と言う。

練習問題 1.3. $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C(\Omega,\mathbb{K}), f\in C(\Omega,\mathbb{K})$ に対して、

$$\begin{aligned}&f_n\to f\ (n\to\infty)\ \textit{in}\ (C(\Omega,\mathbb{K}),\mathfrak{D}_\Phi(C(\Omega,\mathbb{K})))\\ &\qquad\Leftrightarrow \forall K\in\mathfrak{K}(\Omega),\ \|f_n-f\|_K\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

が成立することを示せ。

[2]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

1.2　終位相　(Final Topology)

練習問題 1.4 (終位相). $(X, \mathfrak{O}_X)$ を位相空間、Y を集合とするとき、Y 上に X から Y への写像 f を連続にする最も強い位相が存在することを示せ。これを f に関する Y 上の**終位相**と言い、終位相の開集合系を $\mathfrak{F}_f$ と記す。

例題 1.5. F をユーグリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間とする。

$$\mathbb{R}^n/F = \{v + F \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

の自然な写像

$$\pi : \mathbb{R}^n \ni v \to v + F \in \mathbb{R}^n/F$$

を連続にする終位相 $\mathfrak{F}_\pi$ により、$\mathbb{R}^n/F$ は位相化される。

定理 1.5 (写像族で定まる終位相). $(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族、Y を集合とする。写像族 $\Phi = \{f_\lambda \mid f_\lambda : X_\lambda \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられているとき、写像族 Φ の元を同時に連続にする Y 上の位相の中で最強なものが存在する。この位相を Φ に関する X の**終位相**と呼び、開集合系を $\mathfrak{F}_\Phi$ と記す。

例題 1.6. Ω を局所コンパクト空間とする。$\mathfrak{K}(\Omega)$ を Ω 上のコンパクト集合全体の集合、$C_0(\Omega)$ を Ω 上の *Compact Support* をもつ連続関数全体とするとき、任意の $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ に対して

$$C_0(K, \Omega) = \{f \in C_0(\Omega) \mid supp\ f \subset K\}$$

とすると、$C_0(K, \Omega)$ は $C_0(\Omega)$ の部分イデアルで、

$$C_0(\Omega) = \bigcup_{K\in\mathfrak{K}(\Omega)} C_0(K, \Omega)$$

$$\eta_K(f) = \|f\|_K \quad for\ \forall f \in C_0(K, \Omega)$$

とすると、η_K は $C_0(K, \Omega)$ の *sup norm* になる。

$$j_K : C_0(K, \Omega) \hookrightarrow C_0(\Omega)$$

すなわち、j_K は $f \in C_0(K, \Omega)$ を $C_0(\Omega)$ の元と同一視する写像 (埋め込み) である。位相空間族 $\{(C_0(K, \Omega), \eta_K)\}_{K\in\mathfrak{K}(\Omega)}$ に対して、$\mathfrak{J} = \{j_K \mid K \in \mathfrak{K}(\Omega)\}$ により決定する終位相 $\mathfrak{F}_\mathfrak{J}$ を $C_0(\Omega)$ の位相とする。$C_0(\Omega)$ 上の点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0(\Omega)$ が $f \in C_0(\Omega)$ に $C_0(\Omega)$ の位相で収束するとは、$supp\ f_n \subset K\ (n \in \mathbb{N}), supp\ f \subset K$ なる $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ が存在して

$$\|f_n - f\|_K \to 0\ (n \to \infty)$$

となることである。

例題 1.7.

1. $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}-$ 係数多項式全体、$\mathfrak{P}_n$ を n 次以下の多項式全体とするとき、

$$\mathfrak{P}(\mathbb{K}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{P}_n \quad \text{ただし、} \quad \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{P}_n \subset \cdots$$

$\mathfrak{J} = \{j_n \mid j_n$ は $\mathfrak{P}_n$ を $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ の元と見なす写像$\}$ が同時に連続になる終位相を $\mathfrak{P}(\mathbb{K})$ 上の ***inductive limit* 位相**と言う。

2. $\mathbb{K}[[x]] = \{\sum_{\nu \geq 0} \alpha_\nu x^\nu \mid \alpha_\nu \in \mathbb{K}, \nu \in \mathbb{N}_0\}$ を $\mathbb{K}-$ 上の形式ベキ級数の全体とする。

$$\pi_m\left(\sum_{\nu \geq 0} \alpha_\nu x^\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu x^\nu \quad for\ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

とすると、$\pi_m : \mathbb{K}[[x]] \to \mathfrak{P}_m\ (\forall m \in \mathbb{N}_0)$. $\Pi = \{\pi_m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ を同時に連続にする $\mathbb{K}[[x]]$ 上の始位相を $(\mathfrak{P}_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ から導かれた ***Projective limit* 位相**と言う。

記録　J.S